

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 423-428, 2000

Théorie des Nombres/*Number Theory*(Analyse Harmonique/*Harmonic Analysis*)

# Sur les Formules Explicites I: analyse invariante

Jean-François BURNOL

Laboratoire J. A. Dieudonné, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, F-06108 Nice cedex 02, France

Courriel : burnol@math.unice.fr

(Reçu le 21 juillet 2000, accepté le 17 août 2000)

**Résumé.** Weil a montré que les formules explicites qui relient les idéaux premiers d'un corps de nombres  $K$  aux zéros et pôles des séries  $L$  de Dirichlet-Hecke font intervenir les complétions  $K_\nu$  de  $K$ . Nous montrons que l'analyse de Fourier (multiplicative) de la transformation de Fourier (additive) permet d'obtenir ce résultat, en traitant identiquement chaque place, finie ou infinie, ramifiée ou non. Par ailleurs nous vérifions le critère de positivité de Weil sous une condition de support. © 2000 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## *On the Explicit Formulae I: invariant analysis*

**Abstract.** *Weil has generalized the Riemann-von Mangoldt explicit formula linking the prime numbers with the zeros of the zeta function to the set-up of a general algebraic number field  $K$  and Dirichlet-Hecke  $L$ -function, revealing in the process the rôle played by the completions (finite and infinite) of  $K$ . We show how the local terms of these explicit formulae are explained by the dilation invariant "conductor operator"  $\log(|x|_\nu) + \log(|y|_\nu)$ . We also check Weil's positivity criterion under a support condition.* © 2000 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Abridged English Version

Let  $K$  be a number field and  $\chi$  a Hecke character of the idele group  $\mathbb{A}^\times$  with local component  $\chi_\nu$  at the place  $\nu$ . Haar measures  $dx$  on  $K_\nu$  and  $d^*t$  on  $K_\nu^\times$  are normalized as in [5]. The Hilbert spaces  $L^2(K_\nu, dx)$  and  $L^2(K_\nu^\times, d^*t)$  are canonically isometric. We write  $q_\nu$  for the cardinality of the residue field at a finite place. The dual  $X_\nu$  of  $K_\nu^\times$  is a collection of circles (or lines if  $\nu$  is archimedean). We parametrize the component  $X_\nu^\chi$  containing  $\chi_\nu^{-1}$  with the help of  $D = \{\text{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$ , sending  $s$  to  $\chi_\nu^{-1}(t)|t|_\nu^{-(s-\frac{1}{2})}$ . Let  $\mathcal{F}$  be the additive Fourier transform on  $L^2(K_\nu, dx)$  and  $I$  the inversion  $\varphi(x) \mapsto \frac{1}{|x|_\nu} \varphi(\frac{1}{x})$ . The composite  $\Gamma = \mathcal{F}I$  commutes with  $K_\nu^\times$ , hence is given by a spectral multiplier  $\Gamma(s, \chi_\nu)$  on  $X_\nu^\chi$ . Clearly these are the Tate Gamma functions occurring in  $\mathcal{F}(\chi_\nu(x)|x|_\nu^{s-1}) = \Gamma(s, \chi_\nu)\chi_\nu^{-1}(x)|x|_\nu^{-s}$  (for  $0 < \text{Re}(s) < 1$ ). Let  $g$  be a smooth compactly supported function on  $(0, \infty)$  with Mellin transform  $\hat{g}(s) = \int_0^\infty g(u)u^{s-1}du$ . Let  $W(g; \chi)$  be the sum with multiplicities of  $\hat{g}(s - \frac{1}{2})$  over the zeros and poles of the complete  $L$ -function  $L(s, \chi)$  (poles being counted negatively).

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

LEMMA. –

$$W(g; \chi) = \sum_{\nu} \int_{s=\frac{1}{2}+i\tau} \widehat{g}(i\tau) \frac{\Gamma'(s, \chi_{\nu})}{\Gamma(s, \chi_{\nu})} \frac{d\tau}{2\pi}$$

The contribution due to the discriminant of  $K$  is distributed among the finite places. When  $\nu$  is finite the integrand is periodic except for  $\widehat{g}(i\tau)$ . Using Poisson summation

$$\frac{1}{\log(q_{\nu})} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(j \frac{2\pi i}{\log(q_{\nu})} + i\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(q_{\nu}^k) q_{\nu}^{k i\tau} = \int_{K_{\nu}^{\times}} g(|t|_{\nu}) |t|_{\nu}^{i\tau} d^*t$$

and this integral gives the spectral decomposition of  $g(|t|_{\nu}) \chi_{\nu}^{-1}(t) \in L^2(K_{\nu}^{\times}, d^*t)$  on the characters  $\chi_{\nu}^{-1}(t) |t|_{\nu}^{-i\tau}$  in  $X_{\nu}^{\times}$ . Let  $A = \log(|x|_{\nu})$  acting on  $L^2(K_{\nu}, dx)$  as  $\varphi(x) \mapsto \log(|x|_{\nu}) \varphi(x)$  and  $B = \mathcal{F} A \mathcal{F}^{-1} = \log(|y|_{\nu})$ . On  $L^2(X_{\nu})$  one has  $A = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial s}$ . Then  $\Gamma A \Gamma^{-1}$  acts as  $\alpha(s) \mapsto \Gamma(s, \chi_{\nu}) \frac{\partial}{\partial s} (\Gamma(s, \chi_{\nu})^{-1} \alpha(s)) = \frac{\partial}{\partial s} \alpha(s) - \frac{\Gamma'(s, \chi_{\nu})}{\Gamma(s, \chi_{\nu})} \alpha(s)$ . So the invariant operator  $A - \Gamma A \Gamma^{-1} = A + B$  has spectral multipliers  $+\frac{\Gamma'(s, \chi_{\nu})}{\Gamma(s, \chi_{\nu})}$ . We conclude:

THEOREM. – Let  $g_{\nu}; \chi(t) = g(|t|_{\nu}) \chi_{\nu}^{-1}(t) \in L^2(K_{\nu}^{\times}, d^*t)$ . Then

$$W(g; \chi) = \sum_{\nu} H_{\nu}(g_{\nu}; \chi)(1)$$

where the conductor operator  $H_{\nu}$  acts as  $\log(|x|_{\nu}) + \log(|y|_{\nu})$  on  $L^2(K_{\nu}, dx)$ .

Note. – As  $H_{\nu}$  commutes with  $\mathcal{F}$  and with  $\Gamma$  it also commutes with  $I$  (which on  $L^2(K_{\nu}^{\times}, d^*t)$  is  $f(t) \mapsto f(\frac{1}{t})$ ). This is a local manifestation of the global functional equation.

The theorem explains Weil's discovery [6] of a  $\nu$ -adic origin of the local terms of the Explicit Formula. Weil's formulae for the local terms as well as Haran's [3] (in the case of the Riemann zeta function) are consequences. More details and background are given in the french-language section and in [1].

Let  $Z(g) = \sum_{\rho} \widehat{g}(\rho)$  be the sum over the critical zeros of the Riemann zeta function. Let  $g^{\tau}(u) = \frac{1}{u} g(\frac{1}{u})$  and  $k = g * g^{\tau}$ . Then  $Z(k) = \sum_{\rho} \widehat{g}(\rho) \overline{\widehat{g}(1-\rho)}$  and it is elementary that the Riemann Hypothesis is equivalent to:  $Z(k) \geq 0$  for all smooth compactly supported  $g$ 's (Weil [6], for a wider class of  $g$ 's).

THEOREM. – There is a  $c > 1$  such that  $Z(k) \geq 0$  for all smooth  $g$ 's with support in  $[\frac{1}{c}, c]$ .

Proof. – For  $c \leq \sqrt{2}$  the support of  $k$  is contained in  $[\frac{1}{2}, 2]$  and

$$Z(k) = 2 \operatorname{Re}(\widehat{k}(0)) + \int_{s=\frac{1}{2}+i\tau} h_+(\tau) |\widehat{g}(s)|^2 \frac{d\tau}{2\pi}$$

with  $h_+(\tau) = -\log(\pi) + \operatorname{Re}(\lambda(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i\tau))$  (and  $\lambda(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$ ). As  $\widehat{k}(0) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} k(u) \frac{du}{u} = \int_D \widehat{k}(s) 2^s \frac{1}{s} \frac{d\tau}{2\pi}$  and  $0 = \int_D \widehat{k}(s) 2^{1-s} \frac{1}{s} \frac{d\tau}{2\pi}$ , we have  $2 \operatorname{Re}(\widehat{k}(0)) = \int_D \frac{8\sqrt{2} \cos(\log(2)\tau)}{1+4\tau^2} |\widehat{g}(s)|^2 \frac{d\tau}{2\pi}$ .

$$Z(k) = \int_{s=\frac{1}{2}+i\tau} \left( \frac{8\sqrt{2} \cos(\log(2)\tau)}{1+4\tau^2} + h_+(\tau) \right) |\widehat{g}(s)|^2 \frac{d\tau}{2\pi}$$

The continuous (real-valued) function  $\alpha(\tau) = \frac{8\sqrt{2} \cos(\log(2)\tau)}{1+4\tau^2} + h_+(\tau)$  satisfies  $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \alpha(\tau) = +\infty$  hence for all sufficiently small  $\varepsilon > 0$  and suitable  $A_{\varepsilon} > 0$  :  $\forall \tau \ A_{\varepsilon} \cos(\varepsilon\tau) + \alpha(\tau) \geq 0$ .

Now  $\int \cos(\varepsilon\tau) |\hat{g}(s)|^2 \frac{d\tau}{2\pi} = \operatorname{Re} \left( \int e^{-i\varepsilon\tau} \widehat{k} \left( \frac{1}{2} + i\tau \right) \frac{d\tau}{2\pi} \right) = \operatorname{Re}(e^{\varepsilon/2} k(e^\varepsilon))$ . For  $c = e^{\varepsilon/2}$  one then has  $\int \cos(\varepsilon\tau) |\hat{g}(s)|^2 \frac{d\tau}{2\pi} = 0$  for  $g$  with support in  $[\frac{1}{c}, c]$ , hence  $Z(k) \geq 0$ . Computer calculations help being more precise about the allowable  $c$ 's but anyhow a further idea seems necessary to reach  $c = \sqrt{2}$ .

## 1. Opérateurs invariants

Il est bien connu que tout opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  qui commute avec les translations est diagonalisé par la transformation de Fourier mais il nous est utile d'autoriser des multiplicateurs non bornés (et des groupes plus généraux). Nous regroupons ici quelques lemmes dans ce sens à défaut de connaître une référence adaptée (voir [2] pour les démonstrations). Soient  $G$  un groupe topologique séparé, localement compact et abélien (voir Rudin [4]) et  $\widehat{G}$  son dual. Il existe sur  $G$  une mesure de Haar  $dx$  et sur  $\widehat{G}$  la mesure duale  $dy$  pour lesquelles la transformation  $F(\varphi)(y) = \int \varphi(x) \overline{y(x)} dx$  est une isométrie de  $L^2(G, dx)$  sur  $L^2(\widehat{G}, dy)$ . Nous supposons que  $dy$  est une mesure  $\sigma$ -finie. Pour  $\varphi \in L^2(G, dx)$  et  $g \in G$  on note  $g \cdot \varphi$  la fonction  $x \mapsto \varphi(x - g)$ . Un opérateur  $M$  de domaine  $D \subset L^2(G, dx)$  commute avec  $G$  si  $\forall g \forall \varphi : \varphi \in D \Rightarrow (g \cdot \varphi \in D \text{ et } M(g \cdot \varphi) = g \cdot M(\varphi))$ . Soit  $a(y)$  mesurable (finie presque partout),  $D_a = \{\varphi \in L^2(G, dx) \mid a \cdot F(\varphi) \in L^2(\widehat{G}, dy)\}$ , et  $M_a$  de domaine  $D_a$  agissant selon  $M_a(\varphi) = F^{-1}(a \cdot F(\varphi))$ . On considère que  $a = b$  si  $a(y) = b(y)$  p.p.

LEMME 1.1. – *Le domaine  $D_a$  est dense dans  $L^2(G, dx)$ , l'opérateur  $(M_a, D_a)$  est fermé et commute avec  $G$ . Tout opérateur de domaine dense dans  $L^2(G, dx)$ , qui commute avec  $G$ , et qui est fermé, est (uniquement) de la forme  $(M_a, D_a)$ .*

COROLLAIRE 1.2. – *Soit  $(M, D)$  un opérateur de domaine  $D$  dense dans  $L^2(G, dx)$ , qui commute avec  $G$ , et qui est symétrique:  $\forall \varphi, \psi \in D \int \varphi(x) \overline{M(\psi)(x)} dx = \int \overline{M(\varphi)(x)} \psi(x) dx$ . Alors  $(M, D)$  est essentiellement auto-adjoint, et sa clôture auto-adjointe est l'unique  $(M_a, D_a)$  vérifiant  $(M_a, D_a) \supset (M, D)$ .*

LEMME 1.3. – *Soit  $L$  un espace de Hilbert et  $G$  un groupe d'opérateurs unitaires sur  $L$  (non nécessairement abélien). Soit  $M$  un opérateur de domaine  $D$  dense dans  $L$ , symétrique, et commutant avec  $G$ . Si l'algèbre de von Neumann des opérateurs bornés qui commutent avec  $G$  est abélienne alors  $(M, D)$  est essentiellement auto-adjoint.*

## 2. Formules de Weil

Nous exposons certains points du travail de Weil [6], pour une série  $L(s, \chi)$  de Dirichlet. Notons  $\rho$  les zéros (avec multiplicités) de  $L(s, \chi)$  avec  $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ . Soit  $\nu$  une place de  $\mathbb{Q}$ , donc  $\nu = p$  (correspondant à  $\mathbb{Q}_p$ ) ou  $\nu = r$  correspondant à  $\mathbb{R}$ . Soit  $\mathbb{A}$  l'anneau des adèles et  $\mathbb{A}^\times$  le groupe des idèles. Notons  $U_p \subset \mathbb{Q}_p^\times$  le sous-groupe des unités. On a  $\mathbb{A}^\times \cong \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{R}^{\times+} \times \prod_p U_p$  où chaque terme de droite est identifié à son plongement dans  $\mathbb{A}^\times$ . Ainsi un caractère de Hecke  $\chi_H : \mathbb{A}^\times \rightarrow U(1)$  (continu, trivial sur  $\mathbb{Q}^\times$ ), est la donnée d'un caractère  $u \mapsto u^{i\tau}$  de  $\mathbb{R}^{\times+}$ , et d'un nombre fini de caractères non triviaux des  $U_p$ . Ceux-ci équivalent à la donnée d'un caractère  $\chi$  primitif de  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$  (pour  $q = 1$  lire  $\{1\}$ ) pour un certain conducteur  $q$ . Notons  $\pi_p$  l'idèle de composantes 1 pour  $\nu \neq p$  et  $p$  pour  $\nu = p$ . On aura  $p \nmid q \Rightarrow \chi_H(\pi_p) = \chi(p)^{-1} p^{-i\tau}$ . On associe donc au caractère de Dirichlet  $\chi$  un caractère de Hecke, encore noté  $\chi$ , qui sera  $\chi_H^{-1}$  (avec  $\tau = 0$ ). Soit  $\chi_\nu$  la composante locale obtenue par  $\mathbb{Q}_\nu^\times \hookrightarrow \mathbb{A}^\times \xrightarrow{\chi} U(1)$ . Alors  $\chi_p(p) = \chi(p)$  lorsque  $p$  est premier avec  $q$ . Par ailleurs  $\chi_r(t) = 1$  pour  $t > 0$ ,  $\chi_r(t) = \chi(-1)$  pour  $t < 0$ . Soit  $g(u)$  une fonction à

support compact sur  $(0, \infty)$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Notons  $\widehat{g}(s)$  sa transformée de Mellin  $\int_0^\infty g(u)u^{s-1}du$ . Posons  $\delta_\chi = 1$  si  $\chi$  est le caractère principal,  $= 0$  sinon.

THÉORÈME 2.1. (WEIL [6])–

$$\sum_\rho \widehat{g}(\rho - \frac{1}{2}) - \delta_\chi \left( \widehat{g}(-\frac{1}{2}) + \widehat{g}(\frac{1}{2}) \right) = - \sum_\nu \text{PF}_\nu \int_{\mathbb{Q}_\nu^\times} \frac{g(\frac{1}{|t|_\nu}) \sqrt{|t|_\nu} \chi_\nu(t)}{|1 - t|_\nu} d^\times t$$

Dans cette formule  $d^\times t$  est la mesure de Haar sur  $\mathbb{Q}_p^\times$  qui donne une masse de  $\log(p)$  à  $U_p$ . Pour  $\mathbb{R}^\times$  il s'agit de  $\frac{dt}{2|t|}$ . La partie finie  $\text{PF}_\nu$  désigne une certaine régularisation en  $t = 1$ . La somme sur les zéros (et les pôles) s'obtient par une intégrale de contour sur des rectangles et fait donc intervenir la dérivée logarithmique de  $\xi(s, \chi) = \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) L(s, \chi)$  (nous supposons que  $\chi$  est *pair*:  $\chi(-1) = 1$ ). Par transformation de Mellin inverse on obtient une somme  $\sum_\nu w_\nu(g; \chi)$  où les  $w_\nu(\cdot; \chi)$  sont *a priori* des distributions sur  $(0, \infty)$ . Pour la place archimédienne le bord droit du rectangle donne  $-g(1)(\log(\pi) + \gamma)/2 - \int_1^\infty g(u)u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{u} - \int_1^\infty \frac{g(u)u^{-\frac{1}{2}} - g(1)}{u^2 - 1} \frac{du}{u}$ . Avec la contribution du bord gauche cela donne mystérieusement (et la formule vaut aussi pour  $\chi(-1) = -1$ ):

(2.2.)

$$w_r(g; \chi) = -(\log(2\pi) + \gamma)g(1) - \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{g(\frac{1}{t})\sqrt{t} - g(1)}{|1 - t|} d^\times t - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{g(\frac{1}{t})\sqrt{t}}{|1 - t|} d^\times t - \int_{-\infty}^0 \frac{g(\frac{1}{|t|})\sqrt{|t|}\chi(-1)}{|1 - t|} d^\times t$$

Pour  $p \nmid q$  on obtient  $-\log(p) \sum_{j \geq 1} \left( \chi(p)^j p^{-\frac{j}{2}} g(p^j) + \chi(p)^{-j} p^{-\frac{j}{2}} g(p^{-j}) \right)$  et dans le cas ramifié  $p \mid q$  on obtient par l'équation fonctionnelle  $w_p(g; \chi) = +f_p(\chi) \log(p) \cdot g(1)$  où  $f_p(\chi)$  est l'exposant de  $p$  dans  $q$ . Or un calcul explicite élémentaire donne:

THÉORÈME 2.3. (WEIL [6])–

$$f_p(\chi) \log(p) = \int_{|t|_p=1} \frac{1 - \chi_p(t)}{|1 - t|_p} d^\times t$$

ce qui permet à Weil d'écrire d'une manière générale pour une place finie

$$(2.4.) \quad w_p(g; \chi) = - \int_{|t|_p \neq 1} \frac{g(\frac{1}{|t|_p}) \sqrt{|t|_p} \chi_p(t)}{|1 - t|_p} d^\times t - \int_{|t|_p=1} \frac{g(1) \chi_p(t) - g(1)}{|1 - t|_p} d^\times t$$

Haran [3] a montré (pour la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann) que l'on pouvait reformuler les  $w_\nu(g; \chi)$  comme des convolutions *additives*. Soit  $R_s^\nu$  le noyau de convolution additive sur  $\mathbb{Q}_\nu$  dont la transformation de Fourier est  $|y|_\nu^{-s}$ .

THÉORÈME 2.5. (HARAN [3] pour  $\chi = \mathbf{1}$ )– Posons  $\varphi_\nu; \chi(x) = g(|x|_\nu) |x|_\nu^{-\frac{1}{2}} \chi_\nu^{-1}(x)$  pour  $x \in \mathbb{Q}_\nu$ ,  $x \neq 0$  et  $\varphi_\nu; \chi(0) = 0$ . Alors  $w_\nu(g; \chi) = - \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (R_s^\nu * \varphi_\nu; \chi)(1)$ .

Nous mettrons moins en avant le “semi-groupe de Riesz”  $R_s^\nu$  que Haran, au profit de la transformée de Fourier  $G_\nu(x)$  de la distribution  $\log(|y|_\nu)$ . En effet (2.5.) équivaut à:

$$(2.6.) \quad w_\nu(g; \chi) = +(G_\nu * \varphi_\nu; \chi)(1)$$

Il est important que (2.6.) soit également valable pour  $q > 1$  et  $\nu = p, p \nmid q$  (cas ramifié). On peut calculer  $G_\nu(x)$  en utilisant  $\mathcal{F}(|x|_\nu^{s-1}) = \Gamma(s, 1)|x|_\nu^{-s}$  pour  $s = 1 - \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0$  (avec  $\Gamma(s, 1)$  la fonction Gamma de Tate [5]). On vérifie alors que (2.6.) est identique avec (2.2.) et (2.4.).

### 3. L'opérateur conducteur

Nous obtenons (2.6.) simultanément pour les places réelles, complexes, finies et non-ramifiées, finies et ramifiées (voir [1] pour un exposé plus détaillé et des références supplémentaires). Il serait intéressant d'étendre notre interprétation de (2.3.) aux caractères non-abéliens de Artin ([7], [8]).

Soit  $K$  un corps de nombres et  $\chi$  un caractère de Hecke du groupe des idéles  $\mathbb{A}^\times$  de  $K$ . Soit  $\nu$  une place de  $K$ . Si  $\nu$  est finie on note  $q_\nu$  la cardinalité du corps résiduel. Soit  $dx$  la mesure de Haar sur  $K_\nu$ , normalisée comme dans la thèse de Tate [5]. Soit  $d^*t$  la mesure de Haar sur  $K_\nu^\times$ , pour laquelle les unités ont volume 1 (place finie) ou qui est  $\frac{dt}{2|t|}$  (place réelle) ou encore  $\frac{drd\theta}{\pi r}$  (place complexe). Les espaces  $L^2(K_\nu, dx)$  et  $L^2(K_\nu^\times, d^*t)$  sont isométriques. Le dual  $X_\nu$  de  $K_\nu^\times$  est une collection de cercles (ou de droites dans le cas archimédien) indexés par les caractères du sous-groupe des unités. Nous paramétrons la composante  $X_\nu^\chi$  contenant  $\chi_\nu^{-1}$  par la droite critique  $D = \{\text{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$  en associant à  $s$  le caractère  $\chi_\nu^{-1}(t)|t|_\nu^{-(s-\frac{1}{2})}$ . Soit  $\mathcal{F}$  la transformation de Fourier additive qui est donc une isométrie de  $L^2(K_\nu, dx)$ , et  $I$  l'inversion  $\varphi(x) \mapsto \frac{1}{|x|_\nu}\varphi(\frac{1}{x})$ . Le composé  $\Gamma = \mathcal{F}I$  commute avec l'action de  $K_\nu^\times$ , il lui correspond donc des multiplicateurs spectraux  $\Gamma(s, \chi_\nu)$ . On vérifie aisément qu'il s'agit là des fonctions Gamma de Tate qui apparaissent dans l'identité de distributions sur  $K_\nu$ :  $\mathcal{F}(\chi_\nu(x)|x|_\nu^{s-1}) = \Gamma(s, \chi_\nu)\chi_\nu^{-1}(x)|x|_\nu^{-s}$  (pour  $0 < \text{Re}(s) < 1$ ). Soit  $g(u)$  une fonction à support compact sur  $(0, \infty)$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Notons  $W(g; \chi)$  la somme avec multiplicités de  $\hat{g}(s - \frac{1}{2})$  sur les zéros et pôles de la fonction  $L$  complète  $L(s, \chi)$  (les pôles étant comptés négativement).

LEMME 3.1. –

$$W(g; \chi) = \sum_\nu \int_{s=\frac{1}{2}+i\tau} \hat{g}(i\tau) \frac{\Gamma'(s, \chi_\nu)}{\Gamma(s, \chi_\nu)} \frac{d\tau}{2\pi}$$

Dans cette expression la contribution due au discriminant de  $K$  est ventilée sur les places finies. Lorsque  $\nu$  est finie l'intégrand est périodique à l'exception de  $\hat{g}(i\tau)$ . Par sommation de Poisson

$$\frac{1}{\log(q_\nu)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{g}(j \frac{2\pi i}{\log(q_\nu)} + i\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(q_\nu^k) q_\nu^{k i\tau} = \int_{K_\nu^\times} g(|t|_\nu) |t|_\nu^{i\tau} d^*t$$

On notera que la mesure sur  $X_\nu^\chi$  duale à  $d^*t$  est  $\log(q_\nu) \frac{d\tau}{2\pi}$  (sur une période de longueur  $\frac{2\pi}{\log(q_\nu)}$ ) et que la dernière intégrale donne la décomposition spectrale de  $g(|t|_\nu)\chi_\nu^{-1}(t) \in L^2(K_\nu^\times, d^*t)$  par les caractères  $\chi_\nu^{-1}(t)|t|_\nu^{-i\tau}$  dans  $X_\nu^\chi$ .

LEMME 3.2. – Soit  $g_{\nu; \chi}(t) = g(|t|_\nu)\chi_\nu^{-1}(t) \in L^2(K_\nu^\times, d^*t)$  et  $H_\nu$  l'opérateur sur  $L^2(K_\nu^\times, d^*t)$  de multiplicateurs spectraux  $\frac{\Gamma'(s, \chi_\nu)}{\Gamma(s, \chi_\nu)}$  sur les  $X_\nu^\chi$ . Alors  $W(g; \chi) = \sum_\nu H_\nu(g_{\nu; \chi})(1)$

Soit  $A = \log(|x|_\nu)$  l'opérateur (non-borné) sur  $L^2(K_\nu, dx)$  qui agit selon  $\varphi(x) \mapsto \log(|x|_\nu)\varphi(x)$  et soit  $B = \mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}$  l'opérateur conjugué. On écrira:  $B = \log(|y|_\nu)$ . Sur  $L^2(X_\nu)$  on a  $A_\nu = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \tau}$ , plus brièvement  $A = \frac{\partial}{\partial s}$ . L'opérateur  $\Gamma A \Gamma^{-1}$  agit selon  $\alpha(s) \mapsto \Gamma(s, \chi_\nu) \frac{\partial}{\partial s} (\Gamma(s, \chi_\nu)^{-1} \alpha(s)) = \frac{\partial}{\partial s} \alpha(s) - \frac{\Gamma'(s, \chi_\nu)}{\Gamma(s, \chi_\nu)} \alpha(s)$ . Ainsi  $H_\nu = A - \Gamma A \Gamma^{-1} = A + B$ . En conclusion:

THÉORÈME 3.3. ([1])– Soit  $g_{\nu; \chi}(t) = g(|t|_\nu)\chi_\nu^{-1}(t) \in L^2(K_\nu^\times, d^*t)$ . On a

$$W(g; \chi) = \sum_\nu H_\nu(g_{\nu; \chi})(1)$$

où  $H_\nu$  est l'opérateur conducteur qui s'écrit

$$H_\nu = \log(|x|_\nu) + \log(|y|_\nu)$$

sur  $L^2(K_\nu, dx)$ .

*Note 3.4.* – On peut évaluer  $H_\nu(g_\nu; \chi)(t)$  en 1 sans ambiguïté car elle admet un représentant lisse ( $\mathcal{C}^\infty$  pour  $\nu$  archimédienne, localement constant pour  $\nu$  finie).

*Note 3.5.* – Soit  $\varphi_\nu; \chi \in L^2(K_\nu, dx)$  défini par  $\varphi_\nu; \chi(x) = g(|x|_\nu) \chi_\nu^{-1}(x)$  pour  $x \neq 0$  (et  $\varphi_\nu; \chi(0) = 0$ ). Considérons  $H_\nu$  comme un opérateur sur  $L^2(K_\nu, dx)$ . Alors  $\sum_\nu H_\nu(\varphi_\nu; \chi)(1)$  est la somme de  $\widehat{g}(s)$  sur les zéros et pôles de  $L(s, \chi)$ .

*Note 3.6.* –  $H_\nu$  commute avec  $I$ : en effet il commute avec  $\Gamma$  et avec  $\mathcal{F}$ . On obtient là une manifestation locale de l'équation fonctionnelle globale des séries  $L$ .

Revenons au corps  $\mathbb{Q}$  et notons  $Z(g) = \sum_\rho \widehat{g}(\rho)$  la somme sur les zéros (non-triviaux) de  $\zeta(s)$ . Soit  $g^\tau(u) = \frac{1}{u} g(\frac{1}{u})$  de sorte que  $\widehat{g^\tau}(s) = \widehat{g}(1-s)$ . Soit  $k = g * g^\tau$  la convolution multiplicative. Alors  $Z(k) = \sum_\rho \widehat{g}(\rho) \overline{\widehat{g}(1-\rho)}$  et il est élémentaire que l'Hypothèse de Riemann équivaut à:  $Z(k) \geq 0$  pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact (Weil [6], pour une classe plus large de fonctions  $g$ ).

**THÉORÈME 3.7.** – *Il existe  $c > 1$  tel que  $Z(k) \geq 0$  pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support dans  $[\frac{1}{c}, c]$ .*

La démonstration est donnée dans la partie en langue anglaise de cette Note.

**Remerciements.** Je remercie la “Société de secours des amis des sciences” (SSAS) pour l'aide qu'elle m'a apportée en 1999.

### Références bibliographiques

- [1] Burnol J.-F., math/9902080. En préparation. Une version préliminaire, intitulée “The Explicit Formula and the conductor operator” (février 1999) 28 pp., est disponible à l'adresse <http://arXiv.org/abs/math/9902080>
- [2] Burnol J.-F., math/9907013. Addendum to “Quaternionic gamma functions” (juillet 1999) 6 pp., manuscrit électronique disponible à l'adresse <http://arXiv.org/abs/math/9907013>
- [3] Haran S., Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, Invent. Math. 101 (1990) 697–703.
- [4] Rudin W., Fourier analysis on groups, Interscience Publishers, 1962.
- [5] Tate J., “Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-function” (Princeton 1950) dans Algebraic Number Theory, Proc. Instructional Conf. Brighton, Academic Press, 1967, 305–347.
- [6] Weil A., Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers, Comm. Sém. Math. Univ. Lund, volume dédié à Marcel Riesz (1952) 252–265. Oeuvres, Vol. II.
- [7] Weil A., Sur les formules explicites de la théorie des nombres, Izv. Mat. Nauk. (Ser. Mat.) 36 (1972) 3–18. Oeuvres, Vol. III.
- [8] Weil A., Basic Number Theory, 3<sup>ème</sup> éd., Springer Verlag New York, 1974.